Örnek 22:
10 tabanindaki $(3^5 + 2\cdot 3^4 + 3^2 + 3)$ sayisinin üç tabanindaki yazilisi asagidakilerden hangisidir?
A)120110 B)102001 C)12001 D)1020011 E) 12100

Çözüm:
$(3^5 + 2\cdot 3^4 + 3^2 + 3) = 1\cdot 3^5 + 2\cdot 3^4 + 0\cdot 3^3 + 1\cdot 3^2 + 1\cdot 3^1 + 0\cdot 3^0$
Buradan $(120110)_3$ bulunur. CEVAP: A

Örnek 23:
5 sayi tabanini göstermek üzere $(ab3)_5 > (323)_5$ esitsizligini saglayan rakamlari farkli kaç tane $(ab3)_5$ sayisi yazilabilir?
A)5 B)4 C)3 D)2 E)1

Çözüm:
$(403)_5 > (323)_5$ CEVAP: C
$(413)_5 > (323)_5$
$(423)_5 > (323)_5$

Örnek 24:
$\dfrac{(xyxy)_a}{(xy)_a} = 26$ ise a kaçtir?
A)2 B)3 C)4 D)5 E)6

Çözüm:

$1\cdot a^0 + 0\cdot a + 1\cdot a^2 + 0\cdot a^3 = 26$ $(0101)_a = 26$ (hangi tabanda olursa olsun bölüm ayni olacaktir.)
$1 + a^2 = 26$
$a^2 = 25$
$a = 5$
CEVAP:D

Örnek 25:
$(a011)_3 - (12b2)_3 = (1c)_3$ yandaki islemde sirasiyla a,b,c, rakamlari kaçtir?
A)1,1,1 B)1,0,1 C)1,2,1
D)2,1,2 E)2,2,2

CEVAP: E

Örnek 26:
$(1{,}42)_5 - (0{,}23)_5 = x$ ise x asagidakilerden hangisidir?
A)1,36 B)1,06 C)1,30 D)1,14 E)1,19
CEVAP: A

FAKTÖRIYEL:

1'den n'e kadar dogal sayilarin çarpimina **n!** denir.

n!=1·2·3..........(n-1)·n
0!=1 ve 1!=1 oldugu kabul edilir.
3!=1.2.3=6
4!=1.2.3.4=24
5!=1.2.3.4.5=120
6!=1.2.3.4.5.6=720 seklinde devam edersek 5!'den sonra bütün sayilarin sifir ile bittigini görürüz ki bu pratik olarak ileride isimize yarayacak bir sonuçtur.

* $\frac{18!}{20!}=\frac{18!}{20\cdot 19\cdot 18!}=\frac{1}{20\cdot 19}=\frac{1}{380}$

* $\frac{10!+9!}{12!}=\frac{10\cdot 9!+9!}{12\cdot 11\cdot 10\cdot 9!}=\frac{9!(10+1)}{9!(12\cdot 11\cdot 10)}=\frac{1}{120}$

* $\frac{(n-1)!}{(n-2)!}=\frac{(n-1)(n-2)!}{(n-2)!}=(n-1)$

ASAL SAYILAR:

Bir ve kendisinden baska böleni olmayan dogal sayilara <u>asal sayilar</u> denir.
Bu tanima göre 1'in asal olmadigi görülür. Çünkü bölenler kümesi bir elemanlidir.

Asal sayilar = { 2, 3, 5, 7, 11.......}

<u>Asal sayilar kümesi sonsuz elemanlidir.</u>
<u>2 disinda tüm asal sayilar tek dogal sayidir.</u>
<u>ki dogal sayinin 1'den baska ortak bölenleri yoksa bu iki sayi aralarinda asal sayilardir.</u>
13,17 ....aralarinda asaldir
6,7.................aralarinda asaldir
8,15............aralarinda asaldir.
Örneklerde görüldügü gibi sayilarin aralarinda asal olmasi için ikisinin de asal olmasi gerekmez.
Dikkat:<u>Bütün sayilar asal sayilarin çarpimindan olusur.</u>

*

$$\begin{array}{r|l} 360 & 2 \\ 180 & 2 \\ 90 & 2 \\ 45 & 3 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \qquad 360 = 2^3\cdot 3^2\cdot 5$$

* 9! Sayisini asal çarpanlarina ayiriniz.

Çözüm:

9'dan küçük asal sayilara bölünerek içindeki asal çarpanlar bulunur.

Örnek 27:

$\frac{40!}{6^k}$ kesrinin en küçük bir tam sayiya esit olmasi için k tam sayisi kaç olmalidir?

A)15 B)16 C)17 D)18 E)19

Çözüm:

40 sayisi arka arkaya 3 böldüğünde içinde 13+4+1=18 tane 3 oldugu görülür,çözümde dikkat edilmesi gereken 2'ye bölmeye gerek olmamasidir.

$\frac{40!}{2^k \cdot 3^k}$ 13+4+1=18 (k'nin alabilecegi en küçük deger) CEVAP: D

Örnek 28:

$98! \cdot 63 = A \cdot 2^m \cdot 7^n$ olduguna göre (m+n) toplaminin en büyük degeri kaçtir?

Çözüm:

98 sayisi arka arkaya 2'ye bölündügünde içinde 49+24+12+6+3+1=95 tane 2 oldugu görülür.
98 sayisi arka arkaya 7'ye bölündügünde içinde 14+2=16 tane 7 oldugu görülür.

$(2^{95} \cdot 7^{16} \cdot B) \cdot 3^2 \cdot 7 = A \cdot 2^m \cdot 7^n$ oldugundan m=95 n=17 olur

m + n = 95 + 17 =112 bulunur.

Örnek 29:

$245 \cdot 2^5 \cdot 5^6$ sayisi kaç basamaklidir?

Çözüm:

$245 \cdot 2^5 \cdot 5^6 = 245 \cdot 2^5 \cdot 5^5 \cdot 5 = 5 \cdot 245 \cdot 10^5 = 122500000 \rightarrow 9$ basamakli

Örnek 30:

$30 \cdot 2^4 \cdot 5^5$ sayisi kaç basamaklidir?

Çözüm:

$30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$ oldugundan

$30 \cdot 2^4 \cdot 5^5 = 2^5 \cdot 5^5 \cdot 3 \cdot 5 = 15 \cdot 10^5 \rightarrow 7$ basamakli

Dikkat: $X \cdot 10^n$ sayisinin kaç basamakli oldugunu bulmak için; X'in basamak sayisi ile n'nin toplandigini görünüz.

Örnek 31:

$250 \cdot 2^6 \cdot 5^5$ sayisinin sonundaki sifir sayisini bulunuz.

Çözüm:

$250 = 2 \cdot 5^3$

$250 \cdot 2^6 \cdot 5^5 = 2^7 \cdot 5^8 = 2^7 \cdot 5^7 \cdot 5 = 5 \cdot 10^7$

o halde sonunda 7 sifir vardir.

Örnek 32:

50! – 20! sayisinin sonundaki sifir sayisinin bulunuz.

$$
\begin{array}{rr}
50! = & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\overbrace{000000000000}^{12 \text{ sifir}} \\
- \quad 20! = & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots xyz0000 \\
\hline
 & a\underbrace{0000}_{4 \text{ sifir}}
\end{array}
$$

50 sayisi 5 ile bölündügünde içinde 10+2=12 tane 5 oldugu görülür.
20 sayisi 5 ile bölündügünde içinde 4 tane 5 oldugu görülür.

Bir dogal sayinin bölenlerinin incelenmesi:

a, b, c asal sayilar; x, y, z sayma sayilari olmak üzere,

$A = a^x \cdot b^y \cdot c^z$ ise

1) P.B.S = (x+1)(y+1)(z+1) **P.B.S = Pozitif Bölenlerin Sayisi**

2) T.B.S = 2·(P.B.S) **T.B.S = Tam sayi Bölenlerin Sayisi**

3) P.B.T = $(a^0 + a^1 + a^2 + \ldots\ldots + a^x)(b^0 + b^1 + b^2 + \ldots\ldots. + b^y)(c^0 + c^1 + c^2 + \ldots\ldots. + c^z)$

P.B.T = Pozitif Bölenlerin Toplami

4) P.B.Ç = $A^{\frac{P.B.S.}{2}}$ **P.B.Ç. = Pozitif Bölenlerin Çarpimi**

Yukarida verdigimiz özellikleri60 sayisina uygularsak;

$60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$ asal çarpanlarina ayirdiktan sonra

1. P.B.S=(2+1)·(1+1).(1+1)=12
2. T.B.S=2.(P.B.S)=2.12=24
3. P.B.T= $(2^0 + 2^1 + 2^2)(3^0 + 3^1)(5^0 + 5^1)$
   =(1+2+4)(1+3)(1+5)=168 bulunur.
4. P.B.Ç=$60^{\frac{P.B.S}{2}} = 60^6$ =N.Ç.B (bu kisaltmanin ne anlama geldigi ile ilgili

e-mail'lerinizi bekliyoruz.)

Örnek 33:

$24\underbrace{000........0}_{n}$ sayisinin sonunda n tane sifir bulunmaktadir.Bu sayinin pozitif bölenlerinin sayisi 80 olduguna göre n kaçtir?

Çözüm:

240000000..............0= $2^3.3.10^n = 2^{n+3}.3.5^n$ asal çarpanlarina ayrildiginda
P.B.S=(3+n+1)(1+1)(n+1)=80
=(n+4)(n+1)=40 yazildiginda n=4 bulunur.

Örnek 34:

$X = 60 \cdot 3^{a-2}$ esitliginde X ve a dogal sayilardir. X'in 24 tane dogal sayi böleni olduguna göre a kaçtir?

A)3 B)4 C)5 D)6 E)7

Çözüm:

$X = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 3^{a-2}$
$X = 2^2 \cdot 3^{a-1} \cdot 5$ (2+1)(a-1+1)(1+1) = 24 a = 4

CEVAP: B

Örnek 35:

$(8 \cdot 30^n)$ dogal sayisinin 16 tane tek dogal sayi böleni var ise kaç tane de çift dogal sayi böleni vardir?

A)116 B)96 C)72 D)64 E)48

Çözüm:

$8 \cdot 30^n = 2^3 \cdot 3^n \cdot 5^n \cdot 2^n = 2^{n+3} \cdot \underbrace{3^n \cdot 5^n}_{tek}$

(n+1)(n+1) = 16 (tek sayilarin kuvvetleride tek ve iki tek sayinin çarpimida tek oldugundan)

$n = 3 \rightarrow 2^6 \cdot 3^3 \cdot 5^3 \rightarrow$ P.B.S. = 7·4·4 = 112
112-16 = 96 bulunur. CEVAP: B

Örnek 36:

a, b $\in N^+$ iken $a = \dfrac{3b+30}{b+2}$ esitligini saglayan kaç farkli b degeri vardir?

A)4 B)5 C)6 D)7 E)8

Çözüm:

Bölme islemi yapildiginda $a = 3 + \dfrac{24}{b+2}$ elde edilir.

$24 = 2^3 \cdot 3 \Rightarrow$ P.B.S.(24) = 4·2 =8

b+2=1 $\Rightarrow$ $b \neq -1 \notin N^+$

b+2=2 $\Rightarrow$ $b \neq 0 \notin N^+$

bu durumda 6 tane b degeri bulunabilir. CEVAP: C

Dikkat: Bu soru tipinde verilen sayi kümelerine dikkat etmek gerekir,örnegin bu soruda a,b tam sayilar olsaydi çözüm yolu ayni fakat sonuç farkli olacakti.

Örnek 37:

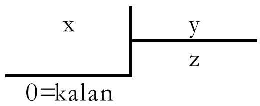
87 evin bulundugu bir sokakta evlerin kapilarina birden itibaren numara verilecektir. Bu numaralama isleminde kaç tane 3 rakami kullanir?

A)20 B)19 C)18 D)15 E)12

Çözüm:

Çözümünü yazmadigimiz sorular için ilginizi bekliyoruz arkadaslar.Böylece notlari dikkatli çalisan arkadaslari da görmüs oluyoruz.

BÖLÜNEBILME KURALLARI:



Bir x dogal sayisi y dogal sayisina bölünebiliyor dendiginde kalanin 0 oldugunu veya baska bir deyisle kalansiz bölündügünü anlariz.

2'ye bölünebilme:

Tüm çift sayilar kümesi 2 ile tam bölünür.

3'e bölünebilme:

Rakamlari toplami 3k ($k \in N$) olan sayilar 3 ile tam bölünür.

4'e bölünebilme:

Son iki basamagi 4k($k \in N$) olan sayilar 4 ile tam bölünür.

XY00 sayisinin 4 ile tam bölündügünü görünüz.

5 ile bölünebilme:

Birler basamagindaki rakami 0 ya da 5 olan sayilar 5 ile tam bölünür.

6'ya bölünebilme:

Dikkat: Bir sayi aralarinda asal iki sayi ile ayri ayri bölünebiliyorsa bunlarin çarpimlari ile de bölünür.

6=2.3 oldugundan 2 ve 3 ile bölünebilen sayilar 6 ile de tam bölünür.

7 ile bölünebilme:

3209696 sayisini 7 ile bölümüne bakarsak;

1 2 3 1 2 3 1 ← birler basamagindan baslayarak sirayla 1,3,2 yazilarak çarpilir.
3 2 0 9 6 9 6
\+ - - - + + + ←birler basamagindan baslayarak 3'er tane ± yazilir.

Yukaridaki gibi düzenleme yapildiktan sonra ,sayinin rakamlari üstündeki sayi ve altindaki isaretle çarpilip daha sonra toplandiginda çikan sayinin 7 ile bölümüne bakilir.

(3 – 4 - 3.0 – 9 +12 + 27 + 6)=35=7k olup 7 ile tam bölünür.

8 ile bölünebilme:

Son üç basamagi 8k(k∈N) olan sayilar 8 ile tam bölünür.
XY000 sayisinin 8 ile tam bölündügüne dikkat edin.

9 ile bölünebilme:

Rakamlari toplami 9k(k∈N) olan sayilar 9ile tam bölünür.

10 ile bölünebilme:

Birler basamagi sifir olan sayilar 10 ile tam bölünür.

11 ile bölünebilme:

Verilen sayi birler basamagindan baslayip rakamlari birer atlayarak toplanir,arada kalan diger sayilarda kendi aralarinda toplandiktan sonra aralarindaki farkin 11 ile bölümüne bakilir.

* 62524 sayisinin 11 ile bölümünü incelersek;

6 2 5 2 4 ⇒ **(4+5+6)** –**(2+2)**=11=11k

olup sayinin 11 ile tam bölündügü görülür.

Simdi bölünme kurallarini inceleyecek bir örnek verelim;

* 456213 sayisina bölünme kurallarini uygularsak;

1. 2 ile bölünemez birler basamagi tektir.
2. (4+5+6+2+1+3)=21=3k olur ve 3 ile tam bölünür.
3. 13=4.3+1 olup 4 ile bölünemez ve kalanin 1 oldugu görülür
4. birler basamagi 3 olup 5 ile bölünemez ve kalan 3olur.
5. 3 ile bölünüp 2 ile bölünemedigi için 6 ile bölünemez

6. birler basamagindan baslayarak +1,+3+2,-1,-3,-2. sayilari ile çarpilip toplandiginda $-19 \neq 7k$ olup 7 ile tam bölünemez ve kalan 2 dir. Nasil buldugumuzu sorarsaniz anlatiriz.
7. 456<u>213</u> son üç basamagi 8'e bölündügünde kalan 5'tir. Sayi 8 ile tam bölünmez
8. $4+5+6+2+1+3 = 21 \neq 9k$ Sayi 9 ile tam bölünmez, kalan 3'tür.
9. 10 ile bölündügünde kalan 3'tür.
10. 4 5 6 2 1 3 $(3+2+5) - (4+6+1) = 10 - 11 = -1 \neq 11k$

Sayi 11 ile tam bölünmez ve 11 ile bölündügünde kalan10 dur.

* 480 sayisi 15 ile tam bölünür mü?

Çözüm:
Sayinin 15 ile bölünebilmesi için 3 ve 5 (aralarinda asal çarpanlar) bölünmesi gerekir. Birler basamagi 0 ve rakamlari toplami 12=3k oldugundan 480 sayisi 15 ile bölünür.

Örnek 38:
$(17!)^2 - (16!)^2$ sayisi asagidaki sayilardan hangisine tam olarak bölünmez?

A)63 B)77 C)121 D)169 E)221

Çözüm:
$(17!)^2 - (16!)^2 = (17! - 16!)(17! + 16!) = 16! \cdot (16) \cdot 16! \cdot (18) = (16!)^2 \cdot 16 \cdot 18$ oldugundan cevaplar kontrol edildiginde (E) bulunur.

Örnek 39:
(9! + 10!) sayisi asagidakilerden hangisine tam olarak bölünemez?

A)15 B)24 C)26 D)44 E)72 (ÖSS 2000)

Çözüm:
$9! + 10 \cdot 9! = 9!(1+10) = 9! \cdot 11$

9! ve 11 sayilarinin içinde 13 asal sayisi yoktur oysa sayini 26 ile bölünebilmesi için 2 ve13 ile bölünebilmesi gerekir. CEVAP: C

Örnek 40:
50 ile 100 arasindaki dogal sayilarin kaç tanesi 3 ile bölünebilir?

A)15 B)16 C)17 D)18 E)33

Çözüm (1):

$51 \leq 3k \leq 99$ oldugundan (99-51)=48 sayisini 3 ile böldügümüzde içinde 16 tane 3 ile bölünebilen sayi oldugunu görürüz.
Fakat burada 99'un sayilmadigina dikkat ediniz. Bu durumda 16+1=17 cevaptir.

Çözüm (2):

100'ü, 3'e böldügümüzde bölüm 33'tür. Bu durumda (0,100) araliginda 3 ile bölünebilen 33 tane sayi vardir.

50'yi, 3'e böldügümüzde bölüm 16'dir. Bu durumda (0,50) araliginda 3 ile bölünebilen 16 sayi vardir.

Buna göre (50,100) araliginda 3 ile bölünebilen 33 –16 = 17 tane sayi vardir.

CEVAP: C

Örnek 41:

A23AB sayisi 15 ile bölünebildigine göre A yerine yazilabilecek rakamlarin toplami nedir?

Çözüm:

5 ile bölünebildigine göre B, 0 ya da 5 olmalidir.

B = 0 için; A+2+3+A+0 = 3k $\Rightarrow$ 2A = 3k-5 olmalidir.

k=2	2A=1	$A \neq 1/2$
k=3	2A=4	A=2
k=4	2A=7	$A \neq 7/2$
k=5	2A=10	A=5
k=6	2A=13	$A \neq 13/2$
k=7	2A=16	A=8

Dikkat: A=2 bulduktan sonra 3'er ekleyerek diger sayilari bulabilirsiniz

B = 5 için; A+2+3+A+5 = 3k $\Rightarrow$ 2A = 3k-10 olmalidir.

k=4 2A=2 A=1 $\Rightarrow$ A = 4 $\Rightarrow$ A = 7

$\sum A = 1+2+4+5+7+8 = 27$ bulunur.

Örnek 42:

(a1ab) dört basamakli sayisinin 30 ile bölümünden kalan 15 ise (a+b)'in en büyük degeri ne olur?

A)14 B)13 C)11 D)10 E)9

Çözüm:

a1ab = 30k + 15 olmalidir.

30 ile bölünebilmesi için 3 ile 10 seçilebilir (niçin 6 ile 5 seçmedigimizi düsününüz). 10 ile bölünebilmesi için **b=0** olur.
Fakat 15 kaldigi için **b=5** olmalidir.

Bu durumda sayi (a1a5) olur. $2a+6 = 3k \Rightarrow 2a = 3k-6$

k=2 2a=0 a=0 (olamaz,sayi dört basamakli)
a=3
a=6
a=9 $\Rightarrow$ 9+5=14 bulunur.

CEVAP: A

Örnek 43:

A sayma sayisinin 13 ile bölümünden kalan 11 ise A^2 sayisinin 13 ile bölümünden kalan kaçtir?

A)4 B)7 C)9 D)10 E)11

Çözüm (1):

Kalanin karesinin 13 ile bölümünden kalani bulmak yeterlidir:
$(11)^2 = 121$ sayisi 13 ile bölündügünde 4 kalanini verir.

Çözüm (2):

$A = 13k+11 \Rightarrow A^2 = (13k+11)^2$

$$\Rightarrow \frac{13^2 \cdot k^2 + 2 \cdot 13 \cdot 11 \cdot k + 11^2}{13} = \frac{11^2}{13}$$ oldugunu görünüz.

Birinci çözümde verdigimiz pratik yolun da nereden geldigini görmüs oldunuz.

Örnek 44:

868686..............8686 seklindeki 22 basamakli sayinin 15'e bölümünden kalan kaçtir?

A)11 B)9 C)7 D)5 E)1

Çözüm:

Sayidan 1 çikartildiginda 5 ile bölünür.
$(8+6) \cdot 11 = 154 \Rightarrow$ rakamlari toplami
154 sayisi 3 ile bölündügünde 1 kaliyor. Bu durumda 22 basamakli sayi 15 ile bölündügünde kalan 1 olur.

CEVAP: E

O B E B - O K E K :

O B E B . . . . . iki ya da daha fazla sayiyi bölebilen sayilardan en büyügü.

O K E K . . . . . iki ya da daha fazla sayiya bölünebilen sayilardan en küçügü.

OBEB ve OKEK bulunurken sayilar asal çarpanlarina ayrilir:

i) OBEB için ortak asal çarpanlarin en küçük üslüleri alinip çarpilir.
ii) OKEK için ortak asal çarpanlarin en büyük üslüleri ve ortak olmayan çarpanlar çarpilir.

* 360 ile 480 sayilarinin OBEB ve OKEK'ini bulunuz.

$$\begin{array}{r|l} 360 & 2 \\ 180 & 2 \\ 90 & 2 \\ 45 & 3 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 480 & 2 \\ 240 & 2 \\ 120 & 2 \\ 60 & 2 \\ 30 & 2 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{l} 360 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \\ 480 = 2^5 \cdot 3 \cdot 5 \end{array}\right\} OBEB = 2^3 \cdot 3 \cdot 5 = 120 ------ OKEK = 2^5 \cdot 3^2 \cdot 5 = 1440$$

II. Yol

$$\begin{array}{rr|l} 360 & 480 & 2 \\ 180 & 240 & 2 \\ 90 & 120 & 2 \\ 45 & 60 & 3 \\ 15 & 20 & 5 \\ \hline 3 & 4 & 2 \\ 3 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & \end{array}$$

OBEB

OKEK

Örnek 45:

a ve b aralarinda asal iki sayidir. Bu iki sayinin OKEK'i 240'dir. $\frac{45}{a} = 19 - b$ ise a kaçtir?

A)12 B)13 C)14 D)15 E)16

Dikkat: sayilar aralarinda asal ise OBEB'leri 1, OKEK'leri sayilarin çarpimina esittir.

Çözüm:

$\frac{45}{a} = 19 - b$

$45 = 19a - ab$

$45 = 19a - 240$

$285 = 19a$

$a = 15$

CEVAP: D